סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת אלגברה ליניארית באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה ליניארית 2 והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il הפתרונות מוגשים בסרטוני ווידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: אלגברה ליניארית 2

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סולומון

GOOL
בשביל התירגול

תוכן עניינים

פרק 1 – מרחבי מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2

נגדיר $<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- R^2 .

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2

נגדיר $<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה

מכפלה פנימית ב- R^2 .

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- R^3

נגדיר $<u,v>=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה

מכפלה פנימית ב- R^3 .

4) לכל שני וקטורים $u=\left(u_1,...,u_n\right)$, $v=\left(v_1,...,v_n\right)$ ב- R^n

נגדיר $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$ כאשר $k_1,...,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב R^n . מהי המכפלה המתקבלת עם $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$

5) לכל שתי מטריצות $A,\ B$ ב- $M_{mxn}[R]$ נגדיר: $<A,B>=tr(B^TA)$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה $trace$ (עקבה) שהוא סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות $f,\ g$ ב- $C[a,b]$ נגדיר: $<f,g>=\int_a^b f\cdot gdx$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

<u>תשובות</u>

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$ נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב $M_{mxn}\left[R\right]$
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב $C\left[a,b\right]$

הנורמה והמרחק

1) נתונים שלושה וקטורים ב- R^3 : $u=(1,-2,2)$, $v=(3,-2,6)$, $w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- R^3 , חשב:

$a)\ <u,v> \quad b)\ <u,w> \quad c)\ <v,w> \quad d)\ <u+v,w> \quad e)\ \|u\|$

$f)\ \|v\| \quad g)\ \|u+v\| \quad h)\ d(u,v) \quad i)\ \hat{u} \quad j)\ \hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב

$1.\langle A,B\rangle \quad 2.\langle A,C\rangle \quad 3.\langle A,B+C\rangle \quad 4.\langle B,C\rangle$

$5.\langle 4A+10B,11C\rangle \quad 6.\|A\| \quad 7.\|B\| \quad 8.d(A,B)$

$9.\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

חשב: $1.\langle p,q\rangle \quad 2.\langle p,r\rangle \quad 3.\langle p,q+r\rangle \quad 4.\langle\|p\|\rangle \quad 5.d(p,q) \quad 6.\hat{r}$

4) הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$.

5) הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$.

6) הוכח: $<u-v,u+v>=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$

8) הוכח: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=<u,v>$.

<u>תשובות</u>

1) 1) 19
2) -5
3) -3
4) -8
5) 3
6) 7
7) $\sqrt{96}$
8) $\sqrt{20}$
9) $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$
10) $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) 1) 185
2) -12
3) 173
4) -24
5) -3168
6) $\sqrt{355}$
7) $\sqrt{139}$
8) $\sqrt{124}$
9) $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$

3) 1) 9
2) -9.5833
3) -0.5833
4) $\sqrt{\frac{37}{3}}$
5) $\sqrt{\frac{4}{3}}$
6) $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

אי שיוויון קושי שוורץ, יישומים

1) הוכח כי $|<u,v>| = \|u\| \cdot \|v\|$ אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

2) יהיו $x_1, x_2, ..., x_n$ ו- $y_1, y_2, ..., y_n$ מספרים ממשיים. הוכח כי
$\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n\right)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right)$.

3) יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$

4) חשב את הזווית בין שני הוקטורים $u = (1,2,2)$ $v = (-2,1,2)$
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- R^3.

5) חשב את הזווית בין שני הוקטורים $u = (3,4)$ $v = (1,2)$
ביחס למכפלה הפנימית
$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ ב- R^2.

6) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x-1$ ו- $q(x) = x^2$
בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q> = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

7) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B> = tr(B^T A)$ ב- $M_{2x2}[R]$.

<u>תשובות</u>

4) $\theta = 63.61^\circ$

5) $\theta = 9.44^\circ$

6) $\cos\left(\theta\right) = 0.173$

7) $\cos\left(\theta\right) = 0.00036$

אורתוגונליות

1) הוכח כי הוקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,2,3)$ אורתוגונליים ב- R^3 .

2) מצא את ערכו של הקבוע k עבורו הוקטורים
$v=(4,7,-6)$, $u=(1,k,3)$ יהיו אורתוגונליים ב- R^3 .

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הוקטורים
$v=(2,5,7)$, $u=(1,2,3)$ שב- R^3 .

4) הוכח כי הפולינומים $q(x)=6x^2-6x+1$, $p(x)=2x-1$
אורתוגונליים בקטע [0,1]
(ביחס למכפלה הפנימית $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $\le n$ מעל R)
נגדיר מכפלה פנימית :

$$\left\langle p(x),q(x)\right\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=\ p(0)q(0)+\ p(1)q(1)+...+\ p(n)q(n)$$

הראה כי הפולינומים :

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)\ ,$$
$$q(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$ עם המכפלה הפנימית
שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות : $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x2}[R]$
מצא את הערך של הקבוע k עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי : $u\perp v\ \Leftrightarrow\ \|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- R^2 ?

8) הוכח כי : $u\perp v\ \Leftrightarrow\ \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי : $\|u\|=\|v\|\ \Leftarrow\ (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

<u>תשובות</u>

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6) $k=0.5$

משלים אורתוגונלי

1) יהי $W = span\{(1,2,-1,1)\ ,\ (2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$. הראה כי מתקיים
משפט הפירוק .

2) יהי $W = span\{(1,1,1)\}$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$
ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] .

4) יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$
ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] .

5) יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2x2}[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$ ב- $M_{2x2}[R]$

6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A \cdot \underline{x} = 0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי.
והמושג מרחב השורות של המטריצה A

9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי : $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי : $W \subseteq W^{\perp\perp}$

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי : $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי : $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי : $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

תשובות

1) $W^{\perp} = span\left\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\right\}$

2) $W^{\perp} = span\left\{(-1,0,1),(-1,1,0)\right\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\left\{\left(1.5x^2-6x+5\right)\right\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (3,-2,1)\}$
ב- R^3.
א. הראה שהקבוצה S היא אורתוגונלית.
ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ג. ללא חישוב הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- R^3.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (3,-2,1)\}$
ב- R^3. ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות,
רשום את הווקטור $(13,-1,7)$ כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (3,-2,1)\}$
ב- R^3. רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור
כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- R^3 ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכח שלכל $v\in V$

$$v=\frac{<v,u_1>}{<u_1,u_1>}u_1+\frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2+...+\frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}u_n .$$

הערה: הקבוע $a_i=\dfrac{<v,u_i>}{<u_i,u_i>}$ נקרא מקדם פורייה
של v ביחס ל- u_i או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות
$S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,...\}$ ב- $V=C[0,\pi]$
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית, נרמל אותה
לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...\}$
ב- $V=C[0,2\pi]$. האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה
לקבלת קבוצה אורתונורמלית. ענה ביחס למכפלה הפנימית
האינטגרלית. האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- R^3.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1]).

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1])

10) נתונה קבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי ?

האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?

במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.

ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות .

תשובות

1) ב. $S=\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},...\right\}$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},...\right\}$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, $S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ההיטל של וקטור

1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$ ב- R^3.

2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$ ב- R^4. מסמנים גם $proj(v,w)$.

3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1].

4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות

1) $c=0$, $pro(v,w)=cw=0$

2) $c=\frac{-2}{3}$, $proj(\mathrm{v},w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2)$

3) $c=\frac{5}{6}$, $proj(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2$

4) $c=\frac{1}{6}$, $proj(A,\mathrm{B})=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$

תהליך גרהם שמידט

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq R^3$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq R^4$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [-1,1].

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות

1) $$B_{ortonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{ortonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{ortonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$